

Enseignement à distance

Introduction à la physique

Unité d'enseignement LP 104

Fascicule 1/2 : **Introduction, rappels et compléments**

Généralités

Outils mathématiques

Philippe Tourrenc

2005-2006

Table des matières

Introduction iii

I Généralités 1

1 Programme et objectifs 3
1.1 Le programme de physique . . . 3
1.2 Le but de l'enseignement . . . 4
1.3 L'examen et la présentation des résultats . . . 7
1.3.1 *L'examen.* . . . 7
1.3.2 *La Présentation des résultats* . . . 8

2 Formulaire et conventions 11
2.1 Exponentielles et logarithmes . . . 11
2.2 Quelques relations trigonométriques utiles . . . 12
2.3 Symboles de comparaison . . . 13

3 Unités, grandeurs et constantes physiques 15
3.1 Unités du système international (S.I.) . . . 15
3.2 Grandeurs et constantes physiques . . . 17
3.3 Quelques remarques et astuces . . . 19

4 Les mesures 21
4.1 Incertitudes . . . 21
4.2 La dispersion des résultats . . . 21
4.3 Distribution normale des erreurs . . . 23
4.4 Signification de l'incertitude standard . . . 24
4.5 Discussion de cas remarquables . . . 25
4.6 Le langage des probabilités . . . 27
4.6.1 *Le double langage.* . . . 27
4.6.2 *Variable aléatoire et loi de probabilité.* . . . 28
4.6.3 *La mesure.* . . . 29

II Outils mathématiques 31

5 Les fonctions 33
5.1 Fonctions remarquables. . . . 33
5.2 Dérivées . . . 35
5.3 Développements de Taylor et de MacLaurin . . . 35

5.4 Dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables 37

6 Les différentielles **39**
6.1 Fonction d'une seule variable 39
6.1.1 *Représentation graphique.* 39
6.1.2 *Petites variations.* 40
6.2 Fonction de plusieurs variables 41
6.3 Expressions remarquables 42
6.4 Calcul d'incertitudes 42

7 Primitives et Intégrales **45**
7.1 Définition et propriétés des primitives 45
7.2 Définition et propriétés des intégrales 46

8 Les vecteurs **49**
8.1 Repérage de l'espace 49
8.1.1 *Orientation d'un plan et d'un trièdre.* 49
8.1.2 *Repères.* 50
8.2 Produits scalaire et vectoriel 50
8.2.1 *Produit scalaire de deux vecteurs.* 50
8.2.2 *Produit vectoriel.* 51
8.2.3 *Quelques remarques.* 52
8.3 Différentielles et dérivées 53
8.3.1 *Définitions.* 53
8.3.2 *Propriétés.* 53
8.4 Eléments de cinématique et de dynamique 54
8.4.1 *Trajectoire.* 54
8.4.2 *Vitesse ($\mathrm{m\,s^{-1}}$).* 55
8.4.3 *Equation horaire et vitesse.* 55
8.4.4 *Accélération ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).* 56
8.4.5 *Etude de quelques mouvements.* 57
8.5 Champs de vecteurs 59
8.5.1 *Circulation d'un vecteur.* 60
8.5.2 *Gradient d'une fonction.* 60

ooooooooooooooooooooooooooooooo

Introduction

Deux polycopiés[†] avec de nombreux exemples et des sujets d'examen corrigés, des exercices autocorrectifs et des devoirs constituent les documents de base pour l'enseignement à distance de *introduction à la physique*. Notre ambition est de fournir une documentation aussi complète que possible. Cependant, si une certaine abondance favorise l'accès aux sujets traités, elle présente quelques inconvénients. Aussi, après avoir étudié les polycopiés et s'être entraîné avec les exercices, **il est indispensable**[*] de rédiger un formulaire et un résumé aussi succincts que possible dans le but de prendre le recul nécessaire pour s'approprier le cours et en mémoriser les points importants. Si ce travail n'était pas fait, le programme pourrait bien être difficile à assimiler et s'avérer peu utile faute d'avoir hiérarchisé l'importance des sujets traités et des résultats obtenus.

Certaines démonstrations et certains compléments sont *"hors programme"*. Lorsque c'est le cas nous le signalons et c'est précisément le cas du présent fascicule.

Précisons qu'il y a trois sortes de sujets "hors programme" :

1- ceux qui sont supposés assimilés et bien connus (les quatre opérations par exemple),

2- ceux qui relèvent d'une éventuelle anticipation (l'utilisation des différentielles pour le calcul des petites variations).

3- ceux qui sont mentionnés pour être complet mais qui relèvent de la maîtrise d'une technique qui sera éventuellement développée plus tard et ailleurs (certaines démonstrations).

Les développements "hors programme" apparaissent comme nécessaires à la compréhension, à l'approfondissement et à l'autonomie du programme lui même, il en va de même des nombreux exemples et exercices proposés. A l'évidence un sujet "hors programme" peut discrètement s'inviter à l'examen.

∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘

La physique n'est pas une collection de formules que l'on sort au bon moment. C'est avant tout une description du monde qui nous entoure : une description où les mots recouvrent des concepts précis dont il est impératif de saisir le sens et la portée. Les points qui, dans cette optique, méritent une attention particulière ont été soulignés dans le texte, mis en évidence par l'utilisation de **caractères gras** ou *italiques*, ou encore mis entre "guillemets" lorsqu'ils concernent des notions nouvelles. L'examen a principalement pour but de vérifier que les notions correspondantes sont bien assimilées.

Les démonstrations présentées sont des prétextes pour jouer avec les notions introduites, découvrir les relations qu'elles entretiennent entre-elles. Les démonstrations devront être étudiées avec attention dans ce but plus que dans le but de les mémoriser.

Les applications doivent permettre d'apprécier l'intérêt, la pertinence et la portée des concepts introduits. Les étudier ne signifie pas apprendre à reproduire les calculs mais plutôt apprendre à adapter les raisonnements à des situation nouvelles. C'est aussi le but des exercices et des devoirs car **l'objectif est avant tout l'assimilation du cours**.

Dans le cours, les formules importantes sont encadrées. Celles-ci doivent être connues ou susceptibles d'être rétablies rapidement. En particulier, toutes les formules qui définissent une grandeur nouvelle doivent être connues sans hésitation.

[†] Le présent polycopié d'introduction et le polycopié de cours proprement dit.

[*] D'autant plus indispensable que le polycopié n'a pas le même rôle pour des étudiants qui suivent cours et travaux dirigés et pour ceux qui suivent l'enseignement à distance.

Les quatre premiers chapitres qui suivent constituent la première partie de l'introduction. Nous y avons rassemblé des explications et des conseils ainsi que certaines définitions importantes et les notations employées dans le cours.

Les principales formules de mathématiques étudiées au lycée qui doivent être sues ou que l'on doit savoir retrouver rapidement, y sont rappelées ainsi que les principales unités. Quelques grandeurs physiques sont décrites et les valeurs des constantes usuelles sont données.

Le dernier chapitre de la première partie est consacré à l'ébauche de la théorie de la mesure dont la portée dépasse largement la seule physique. Certaines des notions et des définitions introduites à cette occasion seront utilisées dans le cours, dans le contexte de la théorie cinétique des gaz.

Les quatre derniers chapitres constituent la seconde partie de l'introduction. Nous y avons rassemblé sous une forme aussi succincte que possible les premiers outils mathématiques utiles pour l'approfondissement des notions introduites dans le cours de physique. Ces outils et les mathématiques sous-jacentes sont développés et approfondis par ailleurs (voir l'unité d'enseignement de Math100 par exemple). Les présentes notes ne se substituent en aucune manière aux enseignements correspondants.

Une attention particulière sera portée sur les révisions des cours du lycée (les dérivées par exemple) et sur le chapitre 5 ainsi que les sections 6.1 et 8.4.

Il est utile de s'attarder sur la première partie de cette introduction, par contre il est possible de ne faire appel à la seconde partie que dans la mesure où le besoin s'en fait sentir.

Dans la troisième partie nous avons rassemblé des sujets d'examen avec leur corrigé.

Bibliographie

Les cours, les exercices autocorrectifs et les devoirs doivent permettre d'acquérir la maîtrise du programme. Nous donnons cependant une brève bibliographie en complément aux documents fournis.

1. A. Bouyssy, M. Davier, B. Gatty : *Physique pour les sciences de la vie.* Editions Belin : *la physique et ses méthodes* (tome 1), *la matière* (tome 2), *les ondes* (tome3).
2. Claire Lhuillier, Jean Rous : *Introduction à la thermodynamique.* Dunod.
3. Yvan Simon : *énergie et entropie.* Armand Colin-collection U

Première partie

Généralités

Chapitre 1
PROGRAMME ET OBJECTIFS

Introduction à la physique est une unité d'enseignement[†] de la licence qui représente 24h de cours, 24h d'enseignement dirigés et 12h de travaux pratiques soit 6 crédits d'enseignement (60 heures d'enseignement = 6 ECTS). Elle a pour objectif d'*affermir la formation de base en présentant les méthodes et les concepts essentiels de la physique ainsi que les lois importantes en sciences de la vie et de la Terre.*

1.1 Le programme de physique

La caractéristique de l'enseignement supérieure est que le programme de l'examen est défini par le contenu de ce qui a été effectivement étudié et non par un texte qui concernerait tout le monde quel que soit la section, la région ou l'université. Pour ce qui concerne l'enseignement à distance de *Introduction à la physique*, le programme de l'examen écrit est défini par le contenu des polycopiés.

Dans un souci d'homogénéité, un programme commun à toutes les sections d'une même université est établi pour apporter des précisions concrètes aux intentions exprimées ci-dessus dans les objectifs de l'enseignement. C'est ce programme que nous donnons ici :

- *Ordres de grandeur, équations aux dimensions, forces d'interaction.*
- *Energie cinétique, potentielle, lois de conservations, choc.*
- *Introduction à la thermodynamique ; chaleur, théorie cinétique, premier principe.*
- *Hydrostatique, hydrodynamique des fluides parfaits.*

Une fois le programme énoncé, encore faut-il le situer dans un contexte et en préciser les intentions.

La physique est une science de la nature au même titre que la biologie ou la géologie par exemple. C'est tout à la fois une science empirique, basée sur l'observation et l'expérience et une science fondamentale dans la mesure où elle se fixe pour objectif d'énoncer des lois universelles, applicables dans tous les domaines.

Quelle ambition[‡] !

Après bien des tentatives et des hésitations, c'est au 17ème siècle que s'impose définitivement à l'évidence le caractère fructueux d'une telle ambition.

Au début de ce siècle la lunette astronomique et le microscope furent mis au point sous leur forme moderne, vraisemblablement en Hollande. Assez rapidement, on se rendit compte des applications pratiques de la lunette, comme outil de guerre en particulier. Elle se développa dans ce contexte sans oppositions de principe. Par contre, nombreux furent ceux qui ne crurent pas à l'intérêt d'un tel instrument pour l'astronomie. Dans

[†] Unité d'enseignement de Physique 104 à l'Université Pierre et Marie Curie.

[‡] Ne confondons pas ambition et arrogance. Les insuffisances de la physique "triomphante" du 19ème siècle sont là pour rappeler à une certaine modestie et à la nécessité du doute scientifique.

l'esprit de nombreux savants, cette science relevait en effet d'une physique différente de la physique terrestre. Ces instruments inventés pour agrandir, diminuer ou renverser les images étaient perçus comme un moyen de déformer les vérités célestes.

Le grand mérite de *Galilée* fut sans doute d'oser tourner sa lunette vers le ciel, bien plus que d'en améliorer les performances.

Le microscope connut les mêmes méfiances que la lunette astronomique, accrues encore par l'importance des aberrations. Un grand mérite revient, parmi d'autres, à *Robert Hooke*, *Antonie Van Leeuwenhoek* et *Marcello Malpighi* pour le premiers croquis d'un oeil de mouche, la découverte des bactéries dans une goutte d'eau et la naissance de l'anatomie microscopique.

Bien sur, toute opposition était appelée à disparaître une fois comprise la nature de la lumière, une fois connues les lois de la réfraction et une fois admis leur caractère universel.

Le pas le plus spectaculaire vers l'universalité des lois physiques est sans doute franchi vers la fin du siècle avec les théories d'*Isaac Newton* concernant la dynamique et la gravitation.

Mais l'astronomie et l'optique ne sont pas les seuls domaines où l'universalité des lois de la physique présente un caractère fructueux.

Au cours du 17ème siècle le corps humain cesse progressivement d'être un univers particulier régi par l'équilibre des humeurs d'*Hippocrate*, animé par les pneuma platoniciens, au centre duquel le coeur se présente comme la fournaise chère à *Galien.*

Plus simplement le coeur serait une pompe, les artères et les veines des tuyaux. Cette hypothèse hardie qui prétend que les lois de l'hydraulique s'appliquent aussi dans ce cas est due à *William Harvey* qui découvre ainsi la circulation sanguine. Mais c'est principalement *Giovanni Alfonso Borelli* qui montre que le corps humain obéit aux lois de la physique ordinaire. Après avoir observé l'orbite des satellites de Jupiter, étudié l'éruption de l'Etna de 1669 et s'être intéressé aux mouvements des fluides, Borelli se consacre à l'étude du corps humain. Il explique en particulier que les os sont des leviers sur lesquels les muscles appliquent des forces.

De façon plus subtile, *Santorio Santorio* met en évidence le métabolisme. Il s'installe de long mois sur une chaise de sa conception qui lui permet de mesurer la masse des déchets qu'il élimine. Il pèse ses aliments et découvre la nécessité d'une "transpiration imperceptible" pour satisfaire la loi universelle de conservation de la masse que Lavoisier énoncera au siècle suivant à propos des réactions chimiques. C'est par une démarche analogue que le neutrino sera mis en évidence trois siècles plus tard.

Ces exemples nous montrent que les sciences naturelles forment un ensemble qu'il ne convient pas de segmenter en disciplines qui s'ignoreraient les unes les autres.

A l'évidence, les frontières entre les diverses disciplines sont floues. Dans le domaine atomique par exemple, la distinction entre chimie et physique est bien souvent arbitraire. Le vocabulaire lui-même, les mots "biophysique", "géophysique", "astrophysique", traduisent la nécessité d'enjamber ces frontières. Nous pourrions multiplier les exemples.

Cependant les sciences naturelles présentent chacune, des spécificités qu'il serait absurde de nier. Ce sont précisément ces différences qui permettent un enrichissement mutuel des diverses disciplines. Nous retenons ici cette leçon que nous donne l'histoire.

1.2 Le but de l'enseignement

Le but principal des premiers semestres de licence est de vous aider ("vous" étudiants à qui je m'adresse) à acquérir une certaine autonomie vis à vis de vos études.

Cela suppose en préalable **une solide motivation** de votre part. Enthousiasme, curiosité et ténacité sont des qualités indispensables. Encore faut-il mettre en oeuvre les moyens de progresser et ne pas commettre de contresens sur l'objectif des études proposées.

Nous distinguons trois domaines

• **La capacité de concentration et de travail.**

Le seul moyen d'assimiler et de s'approprier des connaissances est d'y consacrer le temps nécessaire sans se laisser détourner du but. Au sortir du lycée, les facultés d'attention sont encore très insuffisantes. Le seul moyen connu pour développer ces facultés est un **travail personnel régulier**.

• **La lecture.**

La capacité à lire un texte est déterminante dans tous les domaines, aussi voulons nous insister sur l'**importance de la lecture**[†].

Lire est une activité difficile qui demande du temps et de l'attention. Dans un texte scientifique il faut reconnaître ou découvrir les concepts mis en oeuvre, cerner les hypothèses qui en définissent le cadre de pertinence, apprécier les résultats présentés, leurs originalités, leur portée et les données sur lesquelles ils s'appuient, distinguer les conjectures et les perspectives. Il faut aussi suivre pas à pas les démonstrations présentées (théoriques ou expérimentales) ; c'est trop souvent sur ce dernier point seulement que se concentre l'attention.

Un texte scientifique, polycopié, manuel universitaire, livre ou article, se lit en trois phases, le stylo à la main, paragraphe après paragraphe ou chapitre après chapitre suivant le cas.

1. Une première lecture a pour but de comprendre la nature du sujet traité. Pas plus ! On lit alors un texte scientifique comme on lit un livre d'histoire.

Ce faisant les points obscurs qui font appel à des connaissances nouvelles ou oubliées (une définition, un théorème, un montage expérimental, etc.) doivent être notés et faire l'objet d'un travail de documentation[‡]. Si la compréhension du texte en dépend, ce travail doit être préalable à la poursuite de la lecture. Dans le cas contraire, c'est à la fin de la première lecture que s'effectue le travail de documentation.

2. Après s'être donné les moyens de comprendre le texte il faut en entreprendre la lecture proprement dite : noter les points essentiels qui méritent réflexion ou mémorisation et écarter momentanément ce qui est secondaire ; il faut en particulier savoir accepter un résultat et remettre à plus tard l'étude de sa démonstration. Plusieurs lectures successives peuvent s'avérer nécessaires selon que l'on cherche à préciser les hypothèses posées, les résultats obtenus, les applications possibles, etc. Lorsque la compréhension du texte est suffisante, on peut en aborder les détails techniques, les démonstrations par exemple.

3. **Après** avoir mis en évidence l'essence du texte, le travail d'appropriation des connaissances peut commencer. Travaux dirigés et travaux libres en sont les moyens. Le travail **doit** se terminer par l'établissement d'une fiche de lecture qui résume les points importants : définitions et formules en particulier.

Le travail dirigé est basé sur la résolution d'exercices proposés tandis que le travail libre prend des formes variés qui reposent sur des initiatives personnelles : transposition des résultats à d'autres domaines déjà connus, lectures complémentaires, interrogations sur le texte étudié, son contexte, son originalité, sa portée et ses applications, etc.

[†] Tout particulièrement lorqu'on suit des études par correspondance ! !

[‡] Consulter, par exemple, les cours du lycée ou relire un chapitre précédent mal assimilé.

Ces trois phases ne sont pas toujours successives. Elles peuvent être simultanées dans les cas simples. Dans bien des cas au contraire, la phase 3 renvoie vers les phases 1 et 2. Ainsi, à propos d'un exercice on peut découvrir une ignorance à combler, l'importance d'un théorème ou la portée d'un concept que l'on avait sous estimées.

• **L'acquisition des connaissances de base.**

Dans son domaine de compétences, la physique propose une description intelligible de la nature. En réalité, ce sont plusieurs descriptions complémentaires qui sont proposées : la mécanique, la thermodynamique, la théorie des ondes, etc.

Une certaine conceptualisation est nécessaire pour éviter que la représentation du monde physique ne se réduise à une accumulation de connaissances disparates concernant la multitude des cas étudiés. A partir d'observations particulières nous mettons en évidence le concept d'onde, par exemple. Nous en étudions alors les propriétés générales (propagation, période, longueur d'onde, etc.). Dans le cas de la lumière ou du son, nous sommes alors en mesure de distinguer les propriétés qui relèvent de leur nature ondulatoire commune (les interférences par exemple) et celles qui leur sont spécifiques comme la vitesse de propagation.

L'utilisation de concepts précis bien choisis permet la description des phénomènes observés en termes quantitatifs. Les lois physiques en donnent alors une explication intelligible. Elles expliquent le comportement des systèmes étudiés en distinguant les *causes* et les *effets*, en mettant en évidence des *corrélations*†.

Le but recherché est d'acquérir cette compréhension des phénomènes et du cadre de leur description.

Quelles formules faut-il savoir par coeur ?

La connaissance d'une formule est inutile si on ne sait ni ce qu'elle signifie ni la mettre en oeuvre. **Ce sont les concepts, les définitions et les méthodes qui sont le plus important,** avant toute formule.

Les *concepts* ne peuvent pas s'exprimer par des formules, le concept de pression par exemple. Par contre, les *lois physiques* et certaines définitions se résument par des "formules mathématiques".

Il est impératif de bien connaître tous les concepts introduits, toutes les définitions et les formules correspondantes. Quant aux lois physiques, ce sont les plus fondamentales qui sont nécessaires. Une même loi peut s'exprimer de diverses manières ou conduire à diverses formulations, utiles dans des cas particuliers seulement. Il convient de retenir les formulations les plus générales ainsi que celles les plus fréquemment utilisées. Nous les noterons en caractères gras ou nous les encadrerons.

Enfin, certaines formules mathématiques reviennent souvent. Elles doivent être connues mais il n'est pas question d'en donner une liste car c'est en travaillant que chacun découvrira celles qui se répètent et qu'il doit mémoriser. Par exemple toutes les formules suivantes doivent être connues : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$, $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.
Faut-il appendre par coeur ces 6 formules ? Ceux qui ont une excellente mémoire les retiendront sans peine, d'autres qui calculent rapidement retiendront seulement les deux premières de ces formules, ils en déduiront les autres si c'est nécessaire. Ainsi, chacun doit décider ce qu'il souhaite mémoriser en fonction de ses propres possibilités.

---

†En été nous bronzons. Le rayonnement solaire en est la "cause".
Nous bronzons et nous mangeons des glaces ; il y a une "corrélation" entre ces deux phénomènes, sans relation de cause à effet.

Pour terminer, il est important de souligner que c'est dans les premières années que l'on bâtit le socle des connaissances nécessaire à la poursuite des études. Il faut donc proscrire tout survol rapide, se méfier de l'impression de "déjà vu" et saisir toute opportunité pour revoir une question et y réfléchir de nouveau.

1.3 L'examen et la présentation des résultats

1.3.1 L'examen.

L'examen écrit n'a pas pour but de tester votre habileté en physique ni votre mémoire mais d'apprécier *votre capacité de lecture*, *la solidité de vos connaissances* et *votre aptitude à les mettre en oeuvre.*

Les connaissances nécessaires pour traiter les problèmes d'examen restent dans le cadre du programme développé dans le cours. Cependant un problème d'examen n'est pas nécessairement l'avatar d'un devoir ou d'un exercice déjà posé dans l'année. **Ils peut aussi mettre en scène des domaines nouveaux, jamais étudiés, ou seulement mentionnés comme dans les polycopiés.** Dans un tel cas ce qui est demandé implicitement c'est précisément de mettre en oeuvre les connaissances acquises, pour ce qu'elles ont de général, sans se laisser dérouter par des détails annexes[†]. Prendre connaissance d'un problème nouveau et en poursuivre l'étude demande en outre une compréhension de la physique et une capacité de lecture qu'il faut cultiver pour distinguer les propriétés que l'on doit admettre et celles que l'on doit démontrer, les hypothèses et les conjectures. A l'évidence, une telle formation ne s'acquiert pas à coup de formules.

Face à un problème d'examen il faut lire le sujet, définir une stratégie et répondre aux questions posées.

1. Lire le sujet.

Dans un examen il faut avant tout, comprendre l'objet du problème, ce qui demande un effort d'assimilation immédiate ; il faut se méfier des ressemblances avec tout problème similaire déjà traité (ce sont parfois les différences qui importent) mais, cependant, savoir reconnaître, le cas échéant, un sujet déjà rencontré.

Il faut comprendre les questions, leurs relations entre elles et ainsi détecter celles qui sont indépendantes.

Pour chaque question il faut trouver dans le texte, ou chercher dans sa mémoire, les hypothèses et les données nécessaires à sa solution et reconnaître les connaissances à mettre en oeuvre.

2. Définir une stratégie.

Une lecture efficace vous conduit à distinguer trois types de questions : celles que vous savez faire, celles pour lesquelles vous avez un doute et celles que vous savez ne pas être en mesure de traiter (mais ne confondez pas la certitude de votre incapacité à traiter une question avec la crainte de ne pas pouvoir la traiter ; souvent la situation se débloque en cours d'épreuve).

Ne vous fixez pas comme objectif de répondre aux questions trop difficiles. Consacrez vous à celles qui vous sont accessibles et à celles pour lesquelles vous avez un doute.

Vous devez toujours commencer par ce que vous savez faire (sans y passer trop de temps), quel que soit l'ordre dans lequel vous traitez les questions. Cependant il ne faut pas oublier que les questions ont en général été posées suivant une certaine logique qui peut être utile à la compréhension et à la solution du problème.

[†] "Une piscine est assimilée à un parallélépipède rectangle de 25 m de long, 7 m de large et 2 m de profondeur. Quel est son volume ?" Face à un tel problème il faut éviter les blocages du type "Je ne peux pas le savoir : l'étude des piscines est hors programme".

3. Donner les réponses.

Traiter un problème, c'est répondre aux questions posées. Ce n'est pas disserter sans raison sur le sujet.

Vous devez expliquer, c'est nécessaire, mais expliquer brièvement.

Encadrez ou soulignez les réponses aux questions posées. S'il n'y a rien à encadrer dans votre copie vous n'aurez pas de points car vous serez restés hors sujet.

1.3.2 La Présentation des résultats

- **Le calcul littéral**.

Les grandeurs physiques sont représentées par des symboles, en général des lettres latines ou grecques, accentuées ou non, avec, parfois, des indices : Q, q, q', q'', θ, Ω', F_3, par exemple.

Certains symboles sont consacrés par l'usage. Ce sont les constantes physiques (par exemple G pour la constante newtonienne de la gravitation) mais aussi certaines grandeurs comme W pour un travail ("*work*" en anglais). Les angles sont souvent désignés par les lettres grecques† α, θ, φ.

Les symboles que vous introduisez doivent être définis ; une fois introduits, il ne faut plus en changer. Vous utiliserez, par exemple une expression telle que " Soit $\overrightarrow{a}$ l'accélération de la masse M ".

Les notations doivent être celles de l'énoncé. Le principe fondamental de la dynamique exprime qu'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée sur une masse m provoque une accélération $\overrightarrow{\gamma}$ telle que $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$. Vous avez mémorisé cette formule. Dans un problème la force est notée $\overrightarrow{\varphi}$ et la masse M tandis que vous avez vous même défini l'accélération $\overrightarrow{a}$. Vous devez dès lors faire un effort de transposition et écrire par exemple ".. en utilisant le principe fondamental de la dynamique, $\overrightarrow{\varphi} = M\overrightarrow{a}$, on trouve...".

- **Les unités.**

Sauf mention contraire, les unités sont celles du ***système international*** (*S.I.*). Les unités les plus courantes ont un nom (et une abréviation) : le mètre (m) pour les longueurs et le pascal (Pa) pour les pressions, par exemple. Le nom d'une unité s'écrit toujours en minuscules. L'abréviation s'écrit avec une majuscule lorsqu'elle est associée à un nom de personne. Il y eut un monsieur *Isaac Newton* qui a donné son nom à l'unité de force mais il n'y eut pas de monsieur *Seconde* qui aurait inventé l'unité de temps. On écrira donc ".. soit une force de 3 newtons (3 N) qui s'exerce pendant 10 secondes (10 s)..".

Les symboles des unités sont fixés par des conventions internationales qui permettent à un physicien chinois de comprendre un physicien argentin. Il est donc très important de les respecter.

- **Les quantités numériques**.

Une grandeur physique s'exprime par un nombre suivi de l'unité : $2,25\,\mathrm{m}$ par exemple. Les conventions internationales fixent cette règle qui est donc impérative (proscrire l'écriture 2 m25 !).

Le nombre qui précède l'unité peut s'écrire de diverses manières. La *notation scientifique* est fort commode. Elle consiste en un signe, $\pm$, et un nombre a, compris entre 1 et 10 suivi d'une puissance de 10.

Par exemple : $-527 = -5,27 \cdot 10^2 = -5,27 \times 10^2$ (ou encore -5.27×10^2 chez les Anglo-saxons où le point remplace la virgule).

Les chiffres significatifs sont ceux de a.

Le rayon de la Terre est $R_\oplus = 6,4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$; $a = 6,4$; on dit que $R_\oplus$ est exprimé avec 2 chiffres significatifs. Cela signifie que la "vraie valeur" de $R_\oplus$ est comprise entre

†Il est utile de connaître l'alphabet grec dont les lettres sont très souvent employées. Parmi les minuscules α, β, γ, δ, ε, θ, λ, μ, ν, π, ρ, σ, τ, φ, ψ, ω sont les plus fréquentes. On rencontre plus rarement, les autres lettres. Parmi les majuscules citons Γ, Δ, Θ, Λ, Σ, Φ, Ψ, Ω.

$6,35 \cdot 10^6$ m et $6,45 \cdot 10^6$ m (*N.B.* $R_\oplus = 6,38 \cdot 10^6$ m avec 3 chiffres significatifs).

Attention ! 6,40 n'a pas le même sens que 6,4 bien que mathématiquement ces deux nombres soient égaux. En effet $\ell = 6,40$ signifie $6,395 < \ell < 6,405$ tandis que $d = 6,4$ signifie $6,35 < d < 6,45$.

Les entiers font généralement exception à la règle précédente : on écrira 4 et non 4,00.... Dans un contexte donné aucune ambiguïté n'est à redouter.

Remarquons que $R_\oplus = 6400\,\text{km}$ est une écriture ambiguë dans la mesure où nous ne savons pas quelle confiance donner aux zéros finaux. L'écriture scientifique lève toute ambiguïté.

Par exemple la charge élémentaire est $e = 1,60217... \times 10^{-19}$ C. Avec 2 chiffres significatifs on écrit $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C mais avec 3 chiffres significatifs $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

La célérité de la lumière dans le vide est $c = 299\,792\,458\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
On écrit $c = 3 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ ou $3,00 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ ou $2,998 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ selon le nombre de chiffres significatifs souhaités.

- **L'ordre de grandeur.**

A l'évidence 10^6 m est une meilleure estimation du rayon terrestre que 6,4 m! Dans l'expression d'une grandeur, les puissances de 10 sont beaucoup plus importantes que les chiffres significatifs.

On rappelle la relation $|A| = 10^{\log_{10}|A|}$. On définit "*l'ordre*" du nombre A comme $\log_{10}|A|$. On arrondit généralement le résultat à l'entier relatif le plus proche, N, pour obtenir l'estimation, $\widetilde{A}$ de A sous la forme $\widetilde{A} = 10^N$. L'estimation $\widetilde{A}$ ainsi obtenue est appelée "*ordre de grandeur de A*". Par exemple

$A =$	10^4	$2\,10^4$	$3{,}17\,10^4$	10^5	etc	10^{-6}	$2\,10^{-6}$	$3{,}17\,10^{-6}$
$\log_{10}\lvert A\rvert$	4	4,3..	4,501...	5	etc	-6	$-5,7...$	$-5,49...$
$A \sim \widetilde{A} =$	10^4	10^4	10^5	10^5	etc	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}

- On retiendra que l'ordre est la puissance de 10 de la notation scientifique si $a < 3$ et que c'est la puissance de 10 augmenté d'une unité pour $a > 3$. L'ordre de grandeur du rayon terrestre est donc 10^7 m. C'est aussi l'ordre de grandeur du diamètre terrestre ($1,28\,10^7$ m). On écrira $R_\oplus \sim 10^7\,\text{m} \sim 2\,R_\oplus$.

- **La présentation des calculs et des résultats.**

L'aboutissement d'un raisonnement est le plus souvent une formule littérale qui conduit à des applications numériques.

1. La formule ne doit contenir que des symboles déjà définis, représentant des quantités connues (soit directement, soit par un calcul antérieur) ou des données numériques à y introduire.
2. Chaque lettre est remplacée par sa valeur numérique en notations scientifique, sans les unités.
3. Les puissances de 10 sont regroupées en une seule.
4. On effectue les simplifications éventuelles, puis on calcule mentalement le résultat de façon approximative en remplaçant les nombres par des nombres voisins choisis pour faciliter les calculs. Ce faisant, l'ordre de grandeur du résultat se trouve déterminé, ce qui est souvent suffisant.
5. On effectue enfin un calcul précis à la calculatrice électronique sans oublier d'en arrondir le résultat pour ne garder que le nombre de chiffres significatifs souhaité. La comparaison du résultat obtenu avec l'ordre de grandeur précédent permet de contrôler le résultat et de rectifier les fautes de frappe.

6. Dans un résultat littéral, des coefficients comme π ou $\sqrt{3}$ ou $2/5$ peuvent apparaître. Il faut les remplacer par leur valeur : $3,14$ ou $1,73$ ou $0,400$ dans les résultats numériques.

Attention ! Le résultat ne doit pas comporter trop de chiffres significatifs et faire croire que la précision est supérieure à celle des données qui en ont permis le calcul. Cependant il ne faut pas que des calculs intermédiaires trop approximatifs, introduisent des erreurs. Si vous souhaitez exprimer le résultat avec n chiffres significatifs, il est sage d'effectuer les calculs avec $n + 2$ chiffres significatifs. Par exemple $x = 7,53$, $y = 6,25$ et $z = 1,96$. On demande la valeur de $A = x/y$ et celle de $B = Az$. Les résultats seront donnés avec trois chiffres significatifs car toute précision apparemment meilleure est illusoire. On trouve donc $A \simeq 1,20$ (exactement $1,2048$). En utilisant cette valeur pour calculer $B = Az$ on trouve $B \simeq 2,35$ (car $1,20 \times 1,96 = 2,352$). Reprenons le même calcul en exprimant la valeur intermédiaire, A, avec 5 chiffres significatifs. on trouve $B = 1,2048 \times 1,96 = 2,3614... \simeq 2,36$. Les réponses correctes sont $A \simeq 1,20$ et $B \simeq 2,36$.

- **Dans un résultat le plus important en sont les unités car elles précisent la nature de la grandeur. Ensuite vient l'ordre de grandeur, enfin (et en dernier seulement) les chiffres significatifs.**

Chapitre 2

FORMULAIRE ET CONVENTIONS

2.1 Exponentielles et logarithmes

Les formules rappelées ci-dessous sont valables dans le cas général sous réserve que les grandeurs mises en jeu soient définies. Par exemple $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$ est une relation satisfaite seulement pour $x > 0$ et $y > 0$.

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$$
$$y = e^x \Longleftrightarrow x = \log_e y = \ln y$$
$$y = 10^x \Longleftrightarrow x = \log_{10} y = \log y$$

N.B. $e \simeq 2,71828...$

$e = 10^{0,43...}$ $\log e = 0,43... = \frac{1}{2,30...}$	$10 = e^{2,30...}$ $\ln 10 = 2,30... = \frac{1}{0,43...}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$a^{m \cdot n} = (a^{\,m})^{\,n} = (a^{\,n})^{\,m}$ $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$
$a^x = e^{x\,\ln a}$	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
$\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a(x/\,y) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a(x^y) = y\,\log_a x$

N.B.. On pose $a^0 = 1$. On rappelle la relation $(ab)^n = a^n\,b^n$.

2.2 Quelques relations trigonométriques utiles

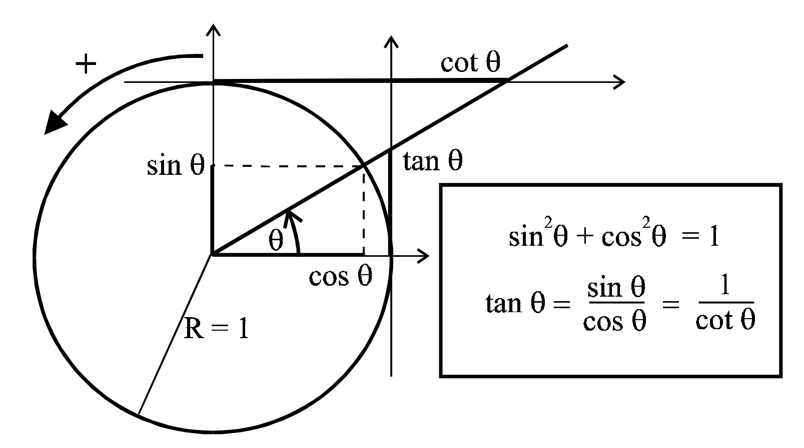


fig. 2.1 : Cercle trigonométrique.

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$
$\cot(-x) = -\cot x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$	$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$	$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$
$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$	$\tan(\pi/2 + x) = -\cot x$
$\cot(\pi/2 - x) = \tan x$	$\cot(\pi/2 + x) = -\tan x$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$	$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$	$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
$\tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

Posons $\tan(x/2) := t$

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin x = \dfrac{2\,t}{1+t^2}$	$\tan x = \dfrac{2\,t}{1-t^2}$

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big)$
$\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$
$\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2} \cdot \sin\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2} \cdot \cos\dfrac{p+q}{2}$

2.3 Symboles de comparaison

- Nous utiliserons parfois le symbole " $:=$ " au lieu de " $=$ ".

Par exemple, définissant l'accélération nous écrirons " $\gamma_x := d^2x/dt^2$ ". Aucune loi n'est exprimée par cette égalité, elle ne représente pas une équation ni un résultat. C'est seulement **une définition**.

Par contre pour présenter la loi fondamentale de la dynamique (la seconde loi de Newton) nous écrirons " $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$ ".

Ainsi $x^3 - 7 := 0$ doit être considéré comme la relation de définition de x, tandis que $x^3 - 7 = 0$ est une équation à résoudre dont la solution devra être notée x_0 par exemple ("Soit x_0 la solution de l'équation $x^3 - 7 = 0$" s'écrit "$x_0^3 - 7 := 0$".).

Lors de démonstrations, nous ferons également usage de " $:=$ " pour souligner que telle égalité est bien établie et qu'elle ne fait pas l'objet de la démonstration en cours (par opposition aux égalités notées " $=$ ").

Nous utiliserons le symbole " $:=$ " dans un souci de concision ou de clarification ; nous n'en ferons pas un usage systématique.

- Nous utiliserons le symbole " $\propto$ " pour signifier **"équivalent à..."** ou **"varie comme..."** ou encore **"proportionnel à..."**.

Considérons par exemple la fonction $F = x^n(1 + \varepsilon(x))$ où $\varepsilon(x)$ décroît vers 0 lorsque x tend vers ∞. Dans ces condition nous poserons $F \propto x^n$ (on dit "F équivalent à x^n"). Cela ne signifie pas que $F - x^n \to 0$. Pour $n = 2$ et $\varepsilon(x) = 1/x$ il vient $F = x^2 + x$ et par conséquent $F - x^2 = x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, cependant, dans ces conditions $F \propto x^2$.

Une grandeur physique P, s'exprime en fonction des variables ρ, T, etc. On écrit $P = F(\rho, T, ...)$. Supposons que l'on ait $P = \rho^\gamma f(T, ..)$ où f est indépendant de ρ. On écrira $P \propto \rho^\gamma$ (on dit "P varie comme ρ^γ"). Bien que le symbole "$\propto$" puisse prendre des sens différents, aucune ambiguïté n'est à redouter dans un contexte donné.

• Très souvent, nous ne sommes pas intéressés par la valeur précise d'une quantité physique mais par son "**ordre de grandeur**" (voir ci-dessus § 1.3.2 page 9).

Ainsi le rayon terrestre, $R_\oplus$ est de l'ordre de 10 000 km (plus précisément 6 400 km). Nous écrirons $R_\oplus \sim 10\,000\,\text{km}$. Remarquer que le diamètre terrestre est du même ordre. Une goutte d'eau dont le diamètre est $d \sim 1\,\text{mm}$ est 10 ordres de grandeur plus petite que la Terre $((1\,\text{mm})/(10\,000\,\text{km}) = 10^{-10})$.

Nous distinguerons les relations " $\simeq$ " (à peu près égale à) et " $\sim$ " (de l'ordre de) : par exemple $1254 \simeq 1,3\,10^3 \sim 10^3$.

• Les symboles " $\gtrsim$ " et " $\lesssim$ " seront employés pour signifier respectivement "**supérieur à un terme de l'ordre de...**" et "**inférieur à un terme de l'ordre de...**" tandis que " $>>$ " et " $<<$ " signifient "**beaucoup plus grand que...**" et "**beaucoup plus petit que...**".

Seules des grandeurs de même nature peuvent être comparées entre elles : une longueur avec une autre longueur, une durée avec une autre durée et **jamais** une durée avec une longueur. Les grandeurs de même nature ont mêmes unités.

Chapitre 3
UNITÉS, GRANDEURS ET CONSTANTES PHYSIQUES

3.1 Unités du système international (S.I.)

Unités de base :

Grandeur	*Unité*	*Symbole*
Longueur	mètre	m
Temps	seconde	s
Masse	kilogramme	kg
Température	kelvin	K
Intensité d'un courant électrique	ampère	A
Intensité lumineuse	candela	cd
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr
Charge électrique	coulomb	C = A s

La seconde et la célérité de la lumière dans le vide sont maintenant des grandeurs fondamentales ; le mètre est donc une grandeur dérivée : c'est la distance parcourue par la lumière en (1/299 792 458) s.

Le radian et le stéradian sont des grandeurs sans dimensions[†].

Le coulomb n'est pas une unité fondamentale mais cependant, nous l'utiliserons souvent de préférence à l'ampère.

Exemples d'unités dérivées

Grandeur	*Unité*	*Symbole*	*Dimension* $\propto$
Aire	mètre carré	$\mathrm{m^2}$	$\mathrm{m^2}$
Volume	mètre cube	$\mathrm{m^3}$	$\mathrm{m^3}$
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Moment d'inertie	kilogramme mètre carré	$\mathrm{kg\,m^2}$	$\mathrm{kg\,m^2}$
Fréquence	hertz	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$
Pulsation	radian par seconde	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$	$\mathrm{s^{-1}}$

[†]Voir dans le cours *"Introduction à la physique"* le chapitre "Analyse dimensionnelle".

Grandeur	*Unité*	*Symbole*	*Dimension* $\propto$
Vitesse	mètre par seconde	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Vitesse angulaire	radian par seconde	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$	$\mathrm{s^{-1}}$
Accélération	mètre par seconde carré	$\mathrm{m\,s^{-2}}$	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
Accélération angulaire	radian par seconde carré	$\mathrm{rad\,s^{-2}}$	$\mathrm{s^{-2}}$
Quantité de mouvement	kg mètre par seconde	$\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$	$\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$
Moment cinétique	S.I.	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$
Force	newton	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
Moment d'une force	Newton-mètre.	$\mathrm{N\,m}$	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$
Pression	pascal	Pa	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$
Travail, énergie, chaleur	joule	J	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2} = N\,m}$
Puissance	watt	W	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3} = J\,s^{-1}}$
Capacité calorifique	joule par kelvin	$\mathrm{J\,K^{-1}}$	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$
Chaleur massique	joule par kg par kelvin	$\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$	$\mathrm{m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$

Grandeur	*Unité*	*Symbole*	*Dimension* $\propto$
Différence de potentielle	volt	V	$\mathrm{J\,C^{-1} = kg\,m^2\,s^{-2}\,C^{-1}}$
Champ électrique	volt par mètre	$\mathrm{V\,m^{-1}}$	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,C^{-1} = N\,C^{-1}}$
Champ magnétique	tesla	T	$\mathrm{kg\,s^{-1}\,C^{-1}}$
Flux magnétique	weber	Wb	$\mathrm{T\,m^2}$
Résistance électrique	ohm	Ω	$\mathrm{V\,A^{-1} = kg\,m^2\,s^{-1}\,C^{-2}}$
Résistivité électrique	ohm mètre	$\Omega\,\mathrm{m}$	$\mathrm{kg\,m^3\,s^{-1}\,C^{-2}}$
Conductance électrique	siemens	S	$\mathrm{A\,V^{-1}} = \Omega^{-1}$
Capacité	farad	F	$\mathrm{C\,V^{-1}}$
Inductance	henry	H	$\mathrm{kg\,m^2\,C^{-2}}$

Autres unités usuelles

Grandeur	*Unité*	*Symbole*	
Longueur	angström	Å	$1\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$
	unité astronomique	u.a	$1\ \mathrm{u.a} \simeq 1,5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
	année lumière	al	$1\ \mathrm{al} \simeq 9,46\cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$
	parsec	pc	$1\ \mathrm{pc} \simeq 3,09\cdot 10^{16}\,\mathrm{m} \simeq 3,26\,\mathrm{al}$
Aire	centiare	ca	$1\,\mathrm{ca} = 1\,\mathrm{m^2}$
	are	a	$1\,\mathrm{a} = 100\,\mathrm{m^2}$
	hectare	ha	$1\,\mathrm{ha} = 10\,000\,\mathrm{m^2}$
Volume		l	$1\,\mathrm{l} = 1\mathrm{d\,m^3} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$

Grandeur	*Unité*	*Symbole*	
Temps	heure	h	$1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$
	minute	mn	$1\,\mathrm{mn} = 60\,\mathrm{s}$
	seconde	s	s
Angle plan	degré	$^\circ$	$1^\circ = (\pi/180)$ rad
	minute	$'$	$1' = (1/60)^\circ$
	seconde	$''$	$1'' = (1/60)'$

Grandeur	*Unité*	*Symbole*	
Chaleur	calorie	cal	$1\,\text{cal} \simeq 4,185\,\text{J}$
Energie	électron-volt	eV	$1\,\text{eV} \simeq 1,60 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$
Champ magnétique	gauss	G	$1\,\text{G} = 10^{-4}\,\text{T}$
Radio-activité	becquerel	Bq	s^{-1}

Remarques : La grande calorie (Cal) ou kilocalorie (1000 cal) est utilisée par les nutritionnistes.

Le nombre de becquerels est le nombre d'événements radioactifs (désintégrations) par seconde.

Multiples et sous-multiples

MULTIPLES			**SOUS-MULTIPLES**		
Facteur	*Préfixe*	*Symbole*	*Facteur*	*Préfixe*	*Symbole*
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	**déci-.**	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	**centi**	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	**milli**	m
10^{15}	péta	P	10^{-6}	**micro**	μ
10^{12}	**téra**	T	10^{-9}	**nano**	n
10^{9}	**giga**	G	10^{-12}	**pico**	p
10^{6}	**mega**	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	**kilo**	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	**hecto**	h	10^{-21}	zepto	z
10	**déca-.**	da	10^{-24}	yocto	y

Remarques : **mega** = million, **giga** = milliard

3.2 Grandeurs et constantes physiques

- Nous noterons **la charge élémentaire** "e" : $e \simeq +1,6 \cdot 10^{-19}$ C. La charge de l'électron sera notée q_e : $q_e = -e$. Ces notations varient d'un auteur à l'autre
- **Les conditions normales** sont caractérisées par une température $T = 273,15\,\text{K}$ (soit 0 °C), une pression de $1\,\text{bar} = 1,013 \cdot 10^5$ Pa. Cette pression était autrefois mesurée en mm de mercure : 1 bar = 760 torr est la pression qu'exerce à sa base une colonne de mercure de 760 mm, surmontée de sa seule vapeur saturante, à la température 0 °C. Cette valeur représente la *pression atmosphérique normale.*
  Dans les conditions normales le volume molaire est 22, 4 l.
- Les deux températures couramment utilisées sont la température thermodynamique et la température Celsius.
  La température thermodynamique est notée T. L'unité en est le kelvin. La température thermodynamique s'identifie à la température absolue et à la température cinétique de la théorie cinétique des gaz parfaits.
  La température Celsius est notée t. Contrairement à la température thermodynamique, la température Celsius n'est pas mesurable mais seulement repérable. Comme la "force" d'un vent de "force 4" ou l'intensité d'un tremblement de Terre sur l'échelle de Richter. Aucune dimension physique n'est associée à la température Celsius. Pour des raisons de commodité (d'origine historique) étant donné un système à la température thermodynamique $T = \widetilde{T}\,\text{K}$ et à la température Celsius $t\,°\text{C}$ on a posé la correspondance $\widetilde{T} = t + 273,15$.
  Sous la pression atmosphérique normale, l'eau bout à 100 °C tandis que l'équilibre *eau* $\rightleftharpoons$ *glace* survient à 0 °C.

- **Les ondes électromagnétiques** sont toutes d'une même nature. Leurs interactions avec la matière et l'utilisation que l'on en fait dépendent de leur longueur d'onde λ.

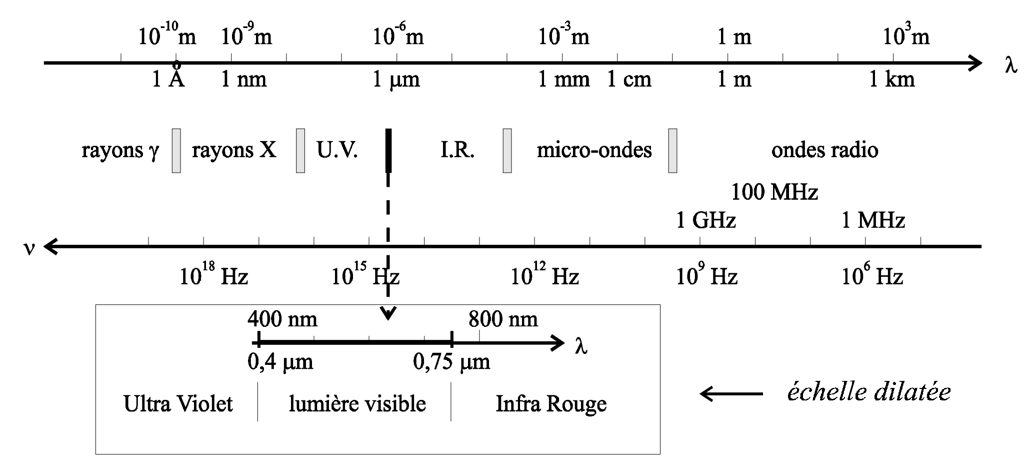


fig. 3.1 : $\lambda\nu = c \simeq 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Les ondes électromagnétiques se propagent toutes dans le vide avec la même célérité $c \simeq 3\cdot 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Elles transportent de l'énergie sous forme de quanta. Un quantum d'énergie est appelé "photon" ; l'énergie d'un photon est égal à $h\,\nu$ où h est la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde : $\nu = c/\lambda$.

Constantes physiques

Grandeur	*Notation*	*Valeur*
Célérité de la lumière dans le vide :	c	$3,00 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Constante de la gravitation :	G	$6,67 \times 10^{-11} \,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Constante de Planck :	h $\hbar := \dfrac{h}{2\pi}$	$6,63 \times 10^{-34} \,\mathrm{J\,s}$ $1,05 \times 10^{-34} \,\mathrm{J\,s}$
Constante de Boltzmann :	k ou k_B	$1,38 \times 10^{-23} \,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Constante des gaz parfaits :	R	$8,31 \,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
Nombre d'Avogadro :	$N_{\mathrm{Av}} := R/k_B$	$6,02 \times 10^{23}$molécules $\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Coulomb :	$K_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$8,99 \times 10^9 \,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$

N.B. Le coefficient ε_0 qui apparaît dans l'expression de la constante de Coulomb est la "*permittivité du vide*" ; ε_0 est définie par la relation $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et μ_0 la "*perméabilité magnétique du vide*".

c est une grandeur fondamentale dont la définition est $c = 299\,792\,458 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ tandis que, par définition, $\mu_0 = \left(4\pi \times 10^{-7}\right)$ SI$= 12,5663... \times 10^{-7} \,\mathrm{N\,A^{-2}}$.

On en déduit la valeur $\varepsilon_0 = 8,854.... \times 10^{-12} \,\mathrm{F\,m^{-1}}$ ainsi que celle de la constante de Coulomb : $K_C = 8,9875... \times 10^9$ SI $\simeq 9,0 \times 10^9$ SI.

Physique subatomique et atomique

Grandeur	*Notation*	*Valeur*
Charge du proton :	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Charge de l'électron :	$q_e = -e$	$-1,60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron :	m_e	$0,911 \times 10^{-30}$ kg
Masse des nucléons : Proton	$m_N \simeq m_P$	$1,673 \times 10^{-27}$ kg
Masse des nucléons : Neutron	$m_N \simeq m_n$	$1,675 \times 10^{-27}$ kg
Masse approximative du nucléon :	m_N	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
Unité de masse atomique :	u.m.a	$1,66 \times 10^{-27}$ kg
Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène :	a	$0,529 \times 10^{-10}$ m
Rayon classique de l'électron :	r_e	$2,82 \times 10^{-15}$ m

Grandeurs terrestre macroscopiques

Vitesse du son dans l'air sec à 20 °C :	$344\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Pression atmosphérique normale :1 atm	$1,013 \times 10^5$ Pa =1 bar = 1000 mbar ; 760 mm Hg = 760 torr
Volume molaire normal :	$22,4\,\mathrm{l} = 22,4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$
Masse de la Terre :	$M_\oplus = 5,98 \times 10^{24}$ kg
Rayon terrestre moyen :	$R_\oplus = 6,38 \times 10^6$ m = 6380 km
Gravité terrestre :	$9,8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9,8\,\mathrm{N\,kg^{-1}}$

Grandeurs astronomiques

Distance moyenne Terre-Soleil :	$1,50 \times 10^{11}$ m = 1 u.a. (1 unité astronomique)
Distance moyenne Terre-Lune :	$3,84 \times 10^8$ m
Masse du Soleil :	$M_\odot = 1,99 \times 10^{30}$ kg
Rayon solaire :	$R_\odot = 6,96 \times 10^8$ m = 696 000 km
Masse de la Lune :	$M_(= 7,35 \times 10^{22}$ kg
Rayon lunaire :	$R_(= 1,74 \times 10^6$ m

3.3 Quelques remarques et astuces

- $G \simeq 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J s , $6,63 \simeq 6,67 \simeq \frac{20}{3}$
  $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m_N \simeq 1,67 \times 10^{-27}$ kg $\simeq 1$ u.m.a , $1,6 \simeq 1,67 \simeq \frac{5}{3}$
  $R \simeq 8,31\,\mathrm{J\,K^{-1}}$, $8,31 \simeq \frac{25}{3}$
-

$\alpha =$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	
$\sin\alpha =$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$	moyen mnémotechnique
$\sin\alpha =$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	
$\cos\alpha =$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	la ligne précédente de droite à gauche.

fonction	approximation	erreur, $e < 10\%$
$\cos\alpha \simeq$	$1 - \frac{\alpha^2}{2}$	pour $\alpha < \pi/3$
$\sin\alpha \simeq$	α	pour $\alpha < \pi/6$

Chapitre 4
LES MESURES

Les notions introduites dans ce chapitre sont très générales. Elles s'appliquent à toutes les sciences expérimentales et observationnelles.

La lecture de ce chapitre constitue un bon exercice de lecture d'un texte rendu difficile par la nature et la portée des concepts introduits.

Dans le cadre de la théorie cinétique des gaz et de la physique statistique, on retrouve les notions de moyenne et de dispersion, le double langage des statistiques et des probabilités ainsi que quelques autres notions introduites ici. Cependant, la théorie de la mesure, les notions d'incertitude standard et d'intervalle de confiance dépassent le cadre du programme de physique.

4.1 Incertitudes

Le résultat d'une mesure est en général donné sous la forme

$$F = f \pm \Delta f$$

Par exemple pour un longueur : $F = 5,231\,\mathrm{m} \pm 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. **L'*incertitude absolue*** sur la mesure est Δf ; c'est une grandeur positive tandis que f est l'estimation de la grandeur mesurée. Une telle expression a même signification que les inégalités

$$f - \Delta f < F < f + \Delta f$$

On définit aussi **l'*incertitude relative*** $\Delta f \;/\; |F|$. La vraie valeur de F n'est pas connue, on estime donc l'incertitude relative au moyen de la grandeur $\Delta f \;/\; |f|$.

L'incertitude absolue s'exprime avec les mêmes unités que f; par contre l'incertitude relative est un nombre pur, sans dimension physique (voir le chapitre 2 du cours concernant l'analyse dimensionnelle).

Il ne faut pas confondre incertitude et erreur. **L'*erreur,*** e, est défini par la relation $e := f - F$; elle est inconnue. Si e était connue, $F = f - e$ serait connu sans incertitude car f est connu.

Pour déterminer les incertitudes, on peut estimer un majorant des erreurs. On peut aussi répéter plusieurs fois la même mesure et apprécier les petites variations des résultats obtenus. Cette méthode conduit à la notion d'**incertitude standard**.

4.2 La dispersion des résultats

Mesurons une grandeur G. Le résultat observé est un nombre g. Nous répétons la même mesure un grand nombre de fois, n. Nous éliminons les résultats manifestement anormaux[†]. Nous obtenons alors une liste $\{g_1, g_2, .., g_n\}$ de résultats fiables. Ces résultats

[†]résultats anormaux dus à un incident expérimental. Les résultats décevants ou surprenants qui ne correspondent pas à nos attentes doivent être conservés si aucune raison objective ne permet de les réfuter.

ne sont pas tous identiques parce qu'aucune mesure n'est parfaite et que des petites variations de conditions expérimentales sont inévitables.

La quantité $g_k - G$ est appelée ***"erreur"*** de la mesure n° k. Nous ne connaissons pas cette erreur mais seulement g_k.

Une estimation de G est donnée par **la moyenne des observations** soit $\widetilde{G} = (g_1 + g_2 + .. + g_n)/n$.

Les résultats des mesures sont dispersés autour de la valeur $\widetilde{G}$ (*N.B.* $\widetilde{G}$ sera aussi notée $\widetilde{G}_{\text{observé}}$ par la suite).

Pour chaque valeur de g_k, nous calculons $\left(g_k - \widetilde{G}\right)^2$ et nous prenons la moyenne de ces diverses quantités. Nous obtenons un nombre positif, σ^2. On définit alors ***"l'écart quadratique moyen"*** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

$$\widetilde{G} \quad : \quad = \frac{1}{n}(g_1 + g_2 + .. + g_n)$$
$$\sigma \quad : \quad = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\left(g_1 - \widetilde{G}\right)^2 + \left(g_2 - \widetilde{G}\right)^2 + ... + \left(g_n - \widetilde{G}\right)^2\right)}$$

Remarquons que σ est nul si et seulement si $n\,\sigma^2 = 0$. Or $n\,\sigma^2$ est la somme des termes positifs $\left(g_k - \widetilde{G}\right)^2$; cette somme s'annule si et seulement si chacun des termes est nul, c'est à dire si toutes les valeurs de g_k sont égales à la même valeur $\widetilde{G}$ (dispersion nulle). D'autre part affirmer que la dispersion est "grande", c'est affirmer que les termes $\left|g_k - \widetilde{G}\right|$ sont "grands" ; cela se traduit par une "grande" valeur de σ. Ces propriétés confèrent à σ le statut d'indicateur de dispersion.

Bien d'autres indicateurs de dispersion pourraient être utilisés : σ^2 lui-même ou $\left|g_1 - \widetilde{G}\right| + \left|g_2 - \widetilde{G}\right| + ... + \left|g_n - \widetilde{G}\right|$ par exemple. Il se trouve que σ présente des propriétés remarquables dans un grand nombre de cas. Aussi est-ce cet indicateur de dispersion qui a été choisi.

Exemple. La mesure d'une longueur est répétée de nombreuses fois. On a obtenu la liste des 18 résultats fiables suivantes $\{10,4\,\text{m},\ 10,7\,\text{m},\ 10,9\,\text{m},\ 10,9\,\text{m},\ 11\,\text{m},\ 11\,\text{m},\ 11\,\text{m},\ 11,1\,\text{m},\ 11,1\,\text{m},\ 11,1\,\text{m},\ 11,1\,\text{m},\ 11,2\,\text{m},\ 11,2\,\text{m},\ 11,3\,\text{m},\ 11,3\,\text{m},\ 11,5\,\text{m},\ 11,7\,\text{m},\ 12\,\text{m}\}$. Une telle liste est appelée ***"série statistique "***. Les résultats sont représentés ci-dessous sur *l'axe des G* où un point représente un résultat.

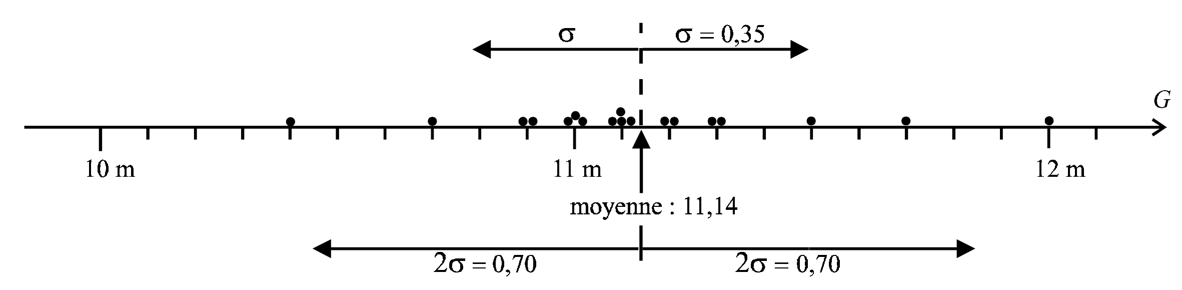


fig. 4.1 : Résultats de la mesure d'une longueur répétée 18 fois.

La moyenne des résultats est $\widetilde{G} \simeq 11,139\,\text{m}$.

Chacune des quantités $\left|g_k - \widetilde{G}\right|^2$ s'exprime en m^2; σ^2 a donc pour unité le m^2. Ainsi σ **a même unité que** G (le m). Cette propriété est générale.

On définit " ***l'intervalle d'incertitude standard*** ", encore appelé usuellement "barre d'erreur" comme l'intervalle $\left[\widetilde{G} - \sigma\ ,\ \widetilde{G} + \sigma\right]$.

La valeur de σ est ici $0,347\,\mathrm{m}$. Trois mesures ont donné un résultat supérieur à $11,139 + 0,347 = 11,486\,\mathrm{m}$ tandis que deux mesures ont donné un résultat inférieur à $11,139 - 0,347 = 10,792\,\mathrm{m}$. Plus de 72% des résultats sont dans l'intervalle d'incertitude standard (car $13/18 \simeq 0,722$).

On admet généralement, et l'expérience le confirme, que ces résultats sont stables, c'est à dire que, dans une nouvelle campagne de mesures assez nombreuses, la moyenne observée $\widetilde{G}$ sera voisine de $11,139\,\mathrm{m}$, l'écart quadratique moyen sera voisin de $0,347$, et que les observations se situeront, pour la plupart, dans l'intervalle d'incertitude standard.

4.3 Distribution normale des erreurs

Nos appareils de mesure sont en général sensibles à de multiples paramètres, la température, la pression atmosphérique, les déformations dues aux efforts appliqués sur les appareils eux mêmes, les champs électriques et magnétiques ambiants, la position de l'oeil qui lit le résultat, etc... Tous ces paramètres sont susceptibles de varier d'une mesure à l'autre et donc d'influer sur le résultat. C'est pour cette raison que les valeurs de g_k ne sont pas toutes égales à G, ni même égales entre elles. Nous avons défini l'**erreur**, e_k, de la mesure n° k

$$e_k := g_k - G$$

1. Nous supposons que l'erreur sur une mesure est la somme des erreurs dues à de nombreuses causes indépendantes les unes des autres.

2. Chacune des causes d'erreur, si elle était seule présente, serait à l'origine d'une dispersion que nous appelons ici "dispersion élémentaire". Nous supposons que chaque dispersion élémentaire est petite devant la dispersion totale due à l'ensemble des causes d'erreur agissant simultanément.

Les deux hypothèses précédentes sont souvent satisfaites. Dans ce cas, si les sources d'erreur sont indépendantes et très nombreuses, il est *presque certain* que les erreurs e_k suivent une distribution statistique réglée par les lois du hasard, connue sous le nom de "*distribution normale*" ou "distribution de Gauss". Cette propriété constitue le théorème central limite. Nous ne démontrons pas ce théorème mais nous consacrons cette section à en préciser la signification.

Nous avons effectué une campagne de n mesures de la même grandeur G inconnue. La moyenne observée $\widetilde{G}_{\text{observé}}$ fournit une estimation de G, tandis que la dispersion des résultats est mesurée par l'écart quadratique moyen $\sigma_{\text{observé}}$[†]. On effectue maintenant de multiples campagnes de mesures. Si pour chacune d'elle n est assez grand ($n \to \infty$), on constate, campagne de mesures après campagne de mesures, que $\widetilde{G}_{\text{observé}}$ prend toujours la même valeur, $\widetilde{G}$, et qu'il en est de même pour l'écart quadratique moyen, $\sigma_{\text{observé}}$, qui prend toujours la même valeur σ. Pour être plus précis, sans entrer cependant dans les détails, il faudrait dire que $\widetilde{G}_{\text{observé}}$ et $\sigma_{\text{observé}}$ fluctuent un peu d'une campagne de mesures à une autre mais que les fluctuations décroissent lorsque n augmente et sont négligeables[‡] le plus souvent lorsque n est assez grand.

[†]En fait on utilise $s = \sigma_{\text{observé}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ mais $n >> 1 \Rightarrow s \simeq \sigma_{\text{observé}}$.

[‡]Lorsque n est élevé, les cas exceptionnels sont en proportion si faible que nous les oublions ici.

Nous pouvons considérer que la valeur $\widetilde{G}$ est voisine de la valeur G. Si ce n'était pas le cas, les mesures présenteraient une erreur systématique que l'on pourrait évaluer en étalonnant l'appareil. Nous supposons donc $\widetilde{G} \simeq G$.

Reprenons l'analyse de la campagne de mesures considérée. Lors de la mesure n° k nous avons commis une erreur $e_k := g_k - G$.

Nous nous donnons un nombre positif α. Nous considérons les cas où la valeur absolue de l'erreur est supérieure à $\alpha\sigma$. La proportion de ces cas est une fonction de α notée $P(\alpha)$.

Exemple (suite). Dans l'exemple précédent $G \simeq 11,14\,\mathrm{m}$ et $\sigma \simeq 0,35\,\mathrm{m}$. Nous nous donnons $\alpha = 2$.

Dans ce cas $\alpha\,\sigma \simeq 0,70\,\mathrm{m}$. Les mesures telles que $|e_k| := |g_k - G| > \alpha\,\sigma$ sont au nombre de deux (celles dont le résultat est $10,4\,\mathrm{m}$ et $12\,\mathrm{m}$). Le nombre total de mesures effectuées étant 18, la proportion $P(2)$ est $P(2) = 2/18 \simeq 0,11 = 11\,\%$.

Le théorème central limite fournit l'expression de $P(\alpha)$ correspondant à une répartition normale des erreurs :

$$P(\alpha) = 2\,(1 - F(\alpha)) \;\text{ avec }\; F(\alpha) := \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-t^2/2}\,dt$$

α	0	1	1,5	2	3	4
$P(\alpha)$	1	0,317	0,134	$4{,}56 \cdot 10^{-2}$	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$	$6{,}3 \cdot 10^{-5}$

La fonction $F(\alpha)$ est tabulée dans tous les livres de statistiques. Par contre, c'est la fonction d'erreur (**er**ror **f**unction en Anglais), notée $\mathrm{erf}(x)$, qui est définie dans la plupart des logiciels de mathématiques : $\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\,du = 2F\left(x\sqrt{2}\right) - 1$.

$$P(\alpha) = 1 - \mathrm{erf}\left(\alpha/\sqrt{2}\right) \tag{4.1}$$

Remarque. Dans l'exemple précédent, nous constatons que $P(1) = 5/18 \simeq 0,28$ et $P(2) \simeq 0,11$ tandis que $P(3) = 0$. Ces valeurs sont différentes des valeurs théoriques $P(1) = 0,317$, $P(2) = 0,0456$ et $P(3) = 2,7 \cdot 10^{-3}$. Cela peut avoir deux origines selon que les mesures ne satisfont pas les hypothèses posées ou, plus vraisemblablement, que le nombre $n = 18$ n'est pas un nombre assez grand.

Sauf mention contraire, dans la suite de ce chapitre nous considérons seulement le cas des mesures qui conduisent à une distribution normale des erreurs.

4.4 Signification de l'incertitude standard

Dans la réalité, nous n'effectuons pas une campagne de mesures mais une seule mesure. Le résultat est un nombre g. Nous définissons une proportion que nous considérons comme *négligeable* : par exemple $3 \cdot 10^{-3} = 0,3\,\%$.

Soit α le nombre tel que $P(\alpha) = 3 \cdot 10^{-3}$. Avec $3 \cdot 10^{-3} \simeq 2,7 \cdot 10^{-3}$, la table ci-dessus donne $\alpha \simeq 3$.

Soit G la valeur inconnue de la grandeur. L'erreur est $e = g - G$. Elle est inconnue mais nous savons que le cas $|e| > \alpha\sigma = 3\,\sigma$ se réalise très rarement (la proportion de tels réalisations est $P(3) \simeq 3 \cdot 10^{-3}$, proportion que nous avons précisément considérée comme *négligeable*). Nous admettons donc que, *presque certainement*, $|e|$ est inférieur à $3\,\sigma$, soit $|g - G| < 3\,\sigma$, ce qui signifie $-3\,\sigma < g - G < 3\,\sigma$. On en déduit $g - 3\,\sigma < G < g + 3\,\sigma$.

On dit que **l'incertitude** sur la mesure est $3\,\sigma$ (au seuil de confiance de $0,3\,\%$). On écrit ce résultat sous la forme

$$G = g \pm 3\,\sigma$$

Comment choisit-on le seuil de confiance $P(\alpha)$? Pourquoi $0,3\,\%$ et pas 10% ou 0,001% ? Tout dépend de l'usage que l'on fera du résultat.

On vous propose de jouer à la loterie une petite somme d'argent, 1 euro par exemple. Vous gagnez si une boule rouge sort de l'urne. Avant de décider si vous jouez ou non, vous observez le jeu et vous remarquez que sur de nombreux tirages la boule rouge sort 5 fois sur 6. La proportion de tirages gagnants est donc $5/6 \simeq 0,83 = 83\%$. Vous en déduisez que cette proportion est grande et donc que la proportion, 17%, des tirages perdants est petite. Vous décidez donc de jouer.

Maintenant on vous propose une roulette russe. Le barillet du revolver à six coups contient une balle. La proportion de situations perdantes est $1/6 \simeq 17\%$ comme dans le cas précédent. Cependant, vous considérerez vraisemblablement dans ce cas que cette proportion est loin d'être négligeable compte tenu du risque.

Cet exemple montre qu'il n'y a pas de définition universelle de ce qu'est une proportion négligeable.

Doit on prendre comme incertitude σ, 2σ ou 3σ ? Aucune réponse ne peut donc être donnée une fois pour toutes. On convient, sauf mention contraire explicite, de choisir σ qui est appelée ***"incertitude absolue standard".*** Nous posons donc conventionnellement $\alpha = 1$ correspondant au seuil $0,317 \simeq 0,32$.

Exemple (suite). Dans l'exemple de la section précédente, la campagne de mesures a permis de déterminer $\sigma \simeq 0,35\,\mathrm{m}$. C'est ce nombre que l'on utilise pour estimer la vraie valeur de σ [†]. Ce paramètre caractérise la précision de la mesure effectuée.

Avec l'appareil ainsi étalonné, nous effectuons la mesure d'une longueur L. Nous trouvons $\ell = 25,13\,\mathrm{m}$. Le résultat sera présenté sous la forme $L = 25,13\,\mathrm{m} \pm 0,35\,\mathrm{m}$.

$\Delta L \simeq 0,35\,\mathrm{m}$ est appelée "incertitude absolue standard" par opposition à la quantité $\Delta L/L \simeq 0,35/25 \simeq 1,4{\cdot}10^{-2}$ qui est appelée ***"incertitude relative standard".***

Remarquons que le troisième chiffre significatif de L est incertain. Exprimer L avec quatre chiffres significatif serait illusoire. Plus raisonnablement on écrira ici $L = 25,1\,\mathrm{m} \pm 0,4\,\mathrm{m}$

4.5 Discussion de cas remarquables

Mesures répétées.

Effectuons deux mesures de la même grandeur avec des appareils différents. Supposons que nous trouvions $G_1 = (10,2 \pm 0,7)$ SI et $G_2 = (11,7 \pm 0,2)$ SI. La première mesure nous apprend qu'il est invraisemblable d'avoir $G > 10,9\,\mathrm{SI}$ tandis que la seconde mesure nous dit qu'il est vraisemblable d'avoir $G > 11,5\,\mathrm{SI}$.

G ne peut pas être plus petit que $10,9\,\mathrm{SI}$ et en même temps plus grand que $11,5\,\mathrm{SI}$, mais "invraisemblable" ne signifie pas "impossible", pas plus que "vraisemblable" ne signifie "certain". Ces résultats ne sont donc pas rigoureusement contradictoires. Cependant l'analyse théorique (que nous ne développons pas) montre que si nous répétions de multiples fois cette paire de mesures un écart $|G_2 - G_1|$ aussi important ou plus grand que celui observé ($1,5\,\mathrm{SI}$) serait rare. Compte tenu de la précision des deux appareils utilisés (estimée par leur dispersion), on observerait $|G_2 - G_1| < 1,5\,\mathrm{SI}$ dans plus de $90\,\%$ des cas. Le résultat obtenu présente donc un caractère exceptionnel.

[†] La vraie valeur de σ ne pourrait être déterminée rigoureusement qu'avec une campagne de mesures telle que $n \to \infty$, ce qui est irréalisable.

Si on ne trouve aucune raison objective de mettre en doute l'une des deux mesures, il faut recommencer pour éclaircir la situation, les deux mesures étant *vraisemblablement* contradictoires.

Lorsque nous effectuons plusieurs mesures, nous accumulons les informations. Ainsi dans l'exemple de la section 4.2 nous avons effectué 18 mesures indépendantes. La moyenne $\widetilde{G}$ de ces mesures est une estimation de G, plus fiable que n'importe laquelle des valeurs g_k. La quantité $\widetilde{G}$ est le résultat d'une campagne de $n = 18$ mesures. En recommençant plusieurs fois une même campagne de n mesures, nous constatons que les valeurs observées, $\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{G}_3$, etc., présentent une certaine dispersion, σ_n, beaucoup plus petite que la dispersion σ des valeurs g_k, observée pendant chaque campagne. On peut démontrer de façon générale, sans faire appel aux hypothèses de la répartition normale, la relation

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

où n est le nombre de mesures effectuées dans chaque campagne.

Dans l'exemple ci-dessus on trouve $\sigma \simeq 0,35\,\mathrm{SI}$ soit $\sigma_n \simeq 0,35\,/\sqrt{18} \simeq 8 \cdot 10^{-2}\mathrm{SI}$. On posera donc

$$L = \left(11,14 \pm 8 \cdot 10^{-2}\right)\ \mathrm{m}$$

Le quatrième chiffre significatif de L n'est pas bien connu mais il a un sens. Par contre si nous effectuons une seule mesure et que nous trouvions $11,21\,\mathrm{m}$ par exemple nous devons écrire $L = 11,21\,\mathrm{m} \pm 0,35\,\mathrm{m}$. Le troisième chiffre significatif est mal connu mais il a un sens, par contre le quatrième chiffre significatif est complètement inconnu aussi écrirons nous $L = 11,2\,\mathrm{m} \pm 0,4\,\mathrm{m}$.

On constate que l'accumulations des mesures permet d'améliorer la précision des résultats. Certaines observations astronomiques ou astrophysiques durent depuis plusieurs dizaines d'années, ce qui a permis l'accumulation de nombreux résultats et la connaissance précise de certaines quantités comme la période de pulsars binaires ou l'angle de déflexion des rayons lumineux par le champ de gravitation solaire.

Mesures non répétables.

Il arrive souvent que les incertitudes soient estimées sans que l'on puisse étalonner les appareils avec des campagnes de mesures préalables. C'est par exemple le cas de la mesure de la distance, D, de la Terre à une sonde spatiale que l'on suit par laser.

Une impulsion lumineuse très brève est émise depuis la Terre à une date donnée par une horloge, cette impulsion est réfléchie sur la sonde et son retour sur Terre est daté au moyen de la même horloge. La méthode expérimentale peut être testée par des campagnes de mesures terrestres. On sait ainsi que la durée du trajet est connue avec une grande précision mais pour en déduire la distance de la sonde il faut connaître la vitesse de la lumière. Dans l'atmosphère cette vitesse dépend des conditions météorologiques. Il n'est pas possible de répéter la même mesure dans des conditions identiques car la sonde spatiale est en mouvement et les propriétés de l'atmosphère varient d'une mesure à l'autre. Dans un tel cas on estime l'effet de l'atmosphère et on en déduit un majorant des effets possibles, noté ΔD. Ce type d'incertitude est celui que nous avons considéré au paragraphe 4.1.

Comme précédemment, le résultat est donné sous la forme $D = D_{\text{mesuré}} \pm \Delta D$ mais ici, l'incertitude absolue n'a pas le même sens que l'incertitude standard.

L'incertitude standard, σ, étant donnée, il revient à chacun de décider si l'incertitude à considérer pratiquement est σ, 2σ ou 3σ. Par contre, dans le cas présent, nous devons admettre sans discussion la relation $D \in [D_{\text{mesuré}} - \Delta D\ ,\ D_{\text{mesuré}} + \Delta D]$.

Dispersion naturelle.

Dans ce qui précède nous avons admis que la grandeur à mesurer est bien définie. La dispersion des résultats est alors une conséquence de l'imperfection des méthodes mises en oeuvre. En améliorant les conditions expérimentales et les performances des appareils, nous diminuons la dispersion et nous augmentons donc, tout à la fois la précision des résultat et la confiance que nous leur portons.

Nous allons considérer maintenant une situation très différente qu'il ne faut pas confondre avec la situation précédente.

Nous étudions une population de lapins d'une espèce donnée. Nous en sélectionnons un échantillon. Nous pesons chacun des lapins de l'échantillon. Nous obtenons un ensemble de masses toutes différentes. Nous pouvons en calculer la moyenne. Cette moyenne ne caractérise pas un lapin particulier mais une espèce de lapins. Elle permet de comparer les espèces entre elles.

Les résultats des mesures sont dispersées autour de la valeur moyenne. On peut encore utiliser l'écart quadratique moyen, σ, pour caractériser cette dispersion. Mais dans le cas présent, si on améliore la précision des balances utilisées, on ne diminue pas la valeur de σ. La dispersion n'est pas associée ici à une imperfection des mesures ; elle a une origine naturelle. C'est une caractéristique de l'espèce de lapins considérée. Moyenne et écart quadratique moyen sont seulement des outils de description qui permettent d'affirmer que les géants blancs de Belgique ont une masse comprise entre 5 kg et 9 kg tandis que celle des lapins angora est comprise entre 3 kg et 4 kg. Bien sur, on peut trouver des lapins angora dont la masse est $4,5$ kg ou plus mais ils sont rares, de même que les géants blanc de Belgique dont la masse est inférieure à 4 kg.

4.6 Le langage des probabilités

4.6.1 Le double langage.

Considérons la série statistique de la section 4.2. La valeur $g = 11$ y apparaît trois fois, on dit que sa "fréquence" est $3/18 \simeq 0,17$ (on l'appelle parfois "fréquence relative" par opposition à la "fréquence absolue" qui est le nombre d'observation soit ici 3)

Nous devons distinguer clairement la liste des $\{g_k\}$ où apparaissent des répétitions et la liste des valeurs différentes prises par les g_k, que nous notons $\overline{g}_j$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs explicites des dix-huit g_k et des dix $\overline{g}_j$

10,4 m	10,7 m	10,9 m	11 m	11,1 m	11,2 m	11,3 m	11,5 m	11,7 m	12 m
$\overline{g}_1$	$\overline{g}_2$	$\overline{g}_3$	$\overline{g}_4$	$\overline{g}_5$	$\overline{g}_6$	$\overline{g}_7$	$\overline{g}_8$	$\overline{g}_9$	$\overline{g}_{10}$
g_1	g_2	g_3 et g_4	g_5 à g_7	g_8 à g_{11}	g_{12} et g_{13}	g_{14} et g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}

Considérons une épreuve dans laquelle tous les g_k de la série statistique sont équiprobables (de probabilité 1/18). Tirons au hasard une valeur de g. Avant le tirage, la valeur de g est inconnue ; cependant à chaque valeur de g est associée une probabilité. La probabilité de "l'événement $g = 11$" est précisément la fréquence 3/18.

On dit que g est une ***"variable aléatoire"*****.** A chaque valeur possible $\overline{g}_j$ de g est associée une probabilité, p_j. La correspondance $\overline{g}_j \to p_j$ définit une ***"loi de probabilité"***.

On définit ***"l'espérance mathématique"***, E, de cette loi de probabilité

$$E := \sum_j p_j \, \overline{g}_j$$

On définit également ”***la variance***” $\mathcal{V}$ de la loi de probabilité et son ”***écart-type***”, S :

$$\mathcal{V} := \sum_j p_j \ \left(\overline{g}_j - E\right)^2 \quad , \qquad S := \sqrt{\mathcal{V}}$$

On peut aisément vérifier la relation $\widetilde{G} = E$, ce qui signifie que la moyenne de la série statistique est égale à l'espérance mathématique de la loi de probabilité que nous venons d'imaginer. De même l'écart quadratique moyen des observations est égale à l'écart-type de la loi de probabilité : $\sigma = S$.

Ainsi, pour décrire une population† connue, un double langage est possible, celui des statistiques (fréquence, moyenne, écart quadratique moyen) et celui des probabilité (probabilité, espérance mathématique, écart-type, variance).

4.6.2 Variable aléatoire et loi de probabilité.

En réalité, lorsqu'on effectue une mesure, on ne se contente pas de tirer un résultat au hasard parmi les n valeurs d'une série statistique mais parmi l'ensemble des résultats possibles de la mesure.

Toutes les valeurs de g sont *a priori* possibles. Pour décrire la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire g, on définit la ”***fonction de répartition***” $F(x)$: la fonction de répartition $F(x)$ est la probabilité de l'événement $g \leq x$.

Considérons l'intervalle $]a, b]$. Si le résultat de la mesure appartient à cet intervalle, cela constitue un événement. La probabilité de cet événement est $F(b) - F(a)$: c'est la probabilité de $g \leq b$ sans avoir $g \leq a$. Une probabilité est un nombre positif ou nul or $F(x)$ et $F(b) - F(a)$ sont des probabilités (pour $b > a$). On en déduit les relations $F(x) \geq 0$ et $F(b) \geq F(a)$ (pour $b > a$). La fonction F n'est donc jamais décroissante ni négative.

Les événement certains ont une probabilité égale à l'unité ; lorsque x tend vers $+\infty$ on est certain que $g < x$, par conséquent $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Les événement impossibles ont une probabilité nulle : $g \leq -\infty$ est un événement impossible par conséquent $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Il est très difficile de distinguer expérimentalement un événement impossible d'un événement fortement improbable. Peut-on gagner le gros lot au loto ? Si je considère mon expérience personnelle la réponse est ”je ne dispose d'aucune aucune évidence expérimentale me permettant de répondre par l'affirmative” pour le savoir je dois multiplier les tentatives. Si je ne gagne jamais je ne connaîtrai jamais la réponse avec certitude (et c'est là que réside la difficulté). Par contre si je gagne une fois je saurai que la probabilité de gagner n'est pas nulle. L'expérience ayant été répétée des millions de fois par les millions de joueurs qui pratiquent ce jeu et la presse nous ayant informé que certains ont déjà gagné, nous savons que la probabilité de gain n'est pas nulle mais qu'elle est très faible. Pratiquement, rien ne serait changé dans ma vie si cette probabilité était nulle. **Un événement très improbable peut être considéré comme un événement pratiquement impossible** (”irréalisable” serait un mot plus juste). Cette idée importante est fondamentale en physique statistique.

La dérivée d'une fonction $F(x)$ satisfait la relation $F'(x) \simeq \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x}$ lorsque δx est assez petit, ce qui implique $F(x + \delta x) - F(x) \simeq F'(x)\,\delta x$. La probabilité de l'intervalle $]x, x + dx]$ est $F(x + dx) - F(x)$. Lorsque dx est infiniment petit on trouve donc $F(x + dx) - F(x) = F'(x)\,dx$. La fonction $F'(x)$ est la ”***densité de probabilité***”, elle est souvent notée $p(x)$. La fonction F n'étant pas décroissante, $p(x)$ n'est pas négatif.

†Une ”population” est un ensemble d'individus. Les ”individus” dont il est question ici sont les résultats des 18 mesures qui constituent la série statistique considérée. Le vocabulaire usuel est souvent issu du vocabualire utilisé en démographie.

probabilité de $-\infty < g \leq x$	$=$	$F(x);$	$F =$ fonction de répartition
probabilité de $x < g \leq x + dx$	$=$	$p(x)\,dx;$	$p = F' =$ densité de probabilité

La loi de probabilité suivi par la variable aléatoire g est définie soit par sa fonction de répartition, soit par sa densité de probabilité.

4.6.3 La mesure.

De façon générale, le schéma mathématique qui décrit une mesure physique est le suivant.

1. Chaque mesure est considérée comme une épreuve aléatoire dont le résultat, g, suit une loi de probabilité en général inconnue.

2. L'espérance mathématique de cette loi est la quantité G à déterminer.

Comment peut-on connaître la loi de probabilité suivie par la variable g?

Pour cela il faut connaître la fonction $F(x)$. Donnons nous une valeur de x, par exemple $x = 2$. La probabilité de l'événement $g \leq 2$ est $F(2)$. Répétons la mesure indéfiniment. Après n mesures, nous remarquons que la proportion de résultats "favorables" tels que $g \leq 2$ est P_n. Au fur et à mesure que nous répétons la même mesure, n croît et P_n fluctue, cependant l'amplitude des variations de P_n tend vers zéro : P_n se stabilise. La valeur limite est la probabilité de l'événement $g \leq 2$. Cette propriété est connue sous le nom de ***"loi des grands nombres"***. En réalité d'autres scénarios sont possibles mais leur probabilité est si faible qu'ils sont pratiquement irréalisables si n est assez élevé.

Pour vérifier la loi des grands nombres nous suggérons l'expérience suivante que chacun peut aisément reproduire.

On dispose d'une aiguille (d'une allumettes ou d'un cure dent) de longueur a. Sur une feuille de papier on trace des parallèles équidistantes de ℓ. On lance l'aiguille en l'air de telle sorte qu'elle retombe au hasard sur la feuille de papier. Le calcul théorique montre que la probabilité pour qu'une aiguille coupe l'une des parallèle est $2\ell/(\pi a) \simeq 0,6366\ (\ell/a)$ dans le cas $\ell > a$.

Comme il est fastidieux de lancer 1000 fois une aiguille en l'air, on utilise une boîte contenant 50 aiguilles identiques. On lance les aiguilles en l'air de telle sorte qu'elles retombent au hasard sur la feuille de papier et on compte les aiguilles qui coupent l'une des parallèles.

On recommence l'expérience 20 fois et à chaque fois on note la proportion, P, d'aiguilles qui ont coupé l'une des parallèles depuis le début de l'expérience. On constate que, lancer après lancer, le nombre obtenu se rapproche de la valeur théorique. Pour $\ell = a$, après avoir lancé 1000 aiguilles, on trouvera très certainement $0,6 < P < 0,7$ et probablement $0,62 \lesssim P \lesssim 0,65$.

En nous appuyant sur la loi des grands nombres, nous pouvons donc accéder expérimentalement à la valeur de $F(x)$ lorsque l'expérience est répétable. On connaît ainsi la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire g.

Lorsque les conditions de validité du théorème central limite sont remplies, l'erreur $g - G$ est une variable aléatoire qui suit presque certainement une loi de probabilité gaussienne **centrée** ("centrée" signifie "dont l'espérance mathématique est nulle").

Nous représentons ci-dessous le graphe des fonctions $p(x)$ et $F(x)$ d'une répartition gaussienne **réduite** centrée ("réduite" signifie "dont l'écart-type est 1").

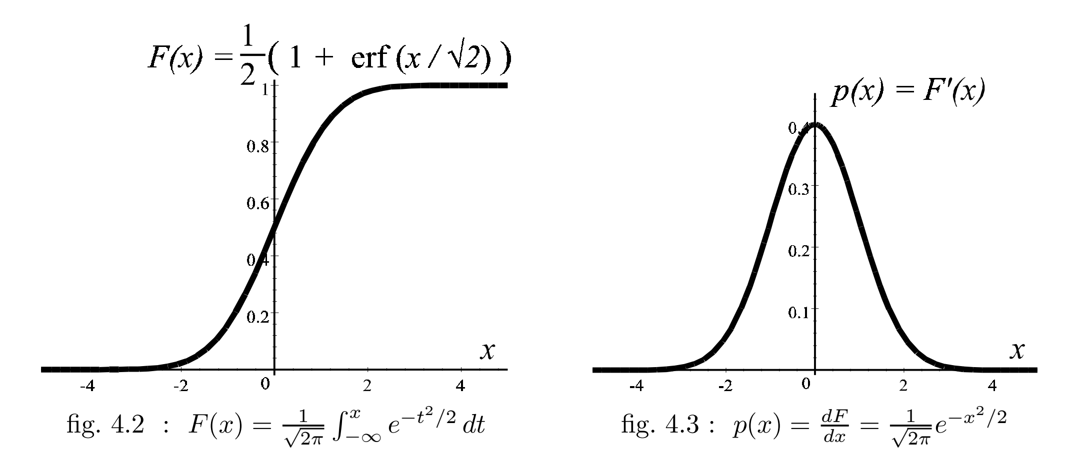


fig. 4.2 : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ fig. 4.3 : $p(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

N.B. On remarquera que la définition et l'expression 4.1 de la fonction $P(\alpha)$ conduisent à la relation $P(\alpha) = 1 - F(\alpha)$.

C'est ce schéma mathématique qui permet de démontrer les résultats affirmés dans ce chapitre. L'expérience montre qu'il s'applique à la quasi totalité des mesures effectuées dans le domaine industriel, économique ou scientifique, sciences naturelles ou sciences humaines.

Soulignons cependant que l'étude précédente concerne seulement le cas où les données sont nombreuses. D'autres techniques doivent être employées lorsqu'un petit nombre de résultats seulement est disponible.